



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学3

基础版

必修第一册 RJA

数智教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

AI时代就该用AI学习
遇到问题快扫我

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS



目录 | 导学案

P 预备知识 初高中衔接

PREKNOWLEDGE

衔接一 数与式	211
衔接二 函数	213

01 第一章 集合与常用逻辑用语

PART ONE

1.1 集合的概念	216
1.2 集合间的基本关系	219
1.3 集合的基本运算	221
第1课时 集合的并集、交集	221
第2课时 集合的全集、补集	223
1.4 充分条件与必要条件	224
1.4.1 充分条件与必要条件	224
1.4.2 充要条件	226
1.5 全称量词与存在量词	228
1.5.1 全称量词与存在量词	228
1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定	230
本章总结提升	232

02 第二章 一元二次函数、方程和不等式

PART TWO

2.1 等式性质与不等式性质	235
第1课时 不等关系与不等式	235
第2课时 等式性质与不等式性质	237
2.2 基本不等式	238
第1课时 利用基本不等式求最值	238

第2课时 基本不等式的简单应用	240
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式	242
第1课时 二次函数与一元二次方程、不等式	242
第2课时 一元二次不等式的简单应用	244
本章总结提升	246

03 第三章 函数的概念与性质

PART THREE

3.1 函数的概念及其表示	249
3.1.1 函数的概念	249
第1课时 函数的概念(一)	249
第2课时 函数的概念(二)	251
3.1.2 函数的表示法	254
第1课时 函数的表示法	254
第2课时 分段函数	256
3.2 函数的基本性质	259
3.2.1 单调性与最大(小)值	259
第1课时 函数的单调性	259
第2课时 利用单调性求最值	262
3.2.2 奇偶性	265
第1课时 奇偶性的概念	265
第2课时 奇偶性的应用	267
3.3 幂函数	269
3.4 函数的应用(一)	272
本章总结提升	274

04

第四章 指数函数与对数函数

PART FOUR

4.1 指数	278
4.1.1 n 次方根与分数指数幂	278
4.1.2 无理数指数幂及其运算性质	278
4.2 指数函数	281
4.2.1 指数函数的概念	281
4.2.2 指数函数的图象和性质	282
第1课时 指数函数的图象和性质(一)	282
第2课时 指数函数的图象和性质(二)	284
4.3 对数	287
4.3.1 对数的概念	287
4.3.2 对数的运算	289
第1课时 对数的运算(一)	289
第2课时 对数的运算(二)	291
4.4 对数函数	293
4.4.1 对数函数的概念	293
4.4.2 对数函数的图象和性质	295
第1课时 对数函数的图象和性质(一)	295
第2课时 对数函数的图象和性质(二)	297
4.4.3 不同函数增长的差异	299
4.5 函数的应用(二)	301
4.5.1 函数的零点与方程的解	301
4.5.2 用二分法求方程的近似解	303
4.5.3 函数模型的应用	305
④ 本章总结提升	308

05

第五章 三角函数

PART FIVE

5.1 任意角和弧度制	312
5.1.1 任意角	312
5.1.2 弧度制	315

5.2 三角函数的概念	317
5.2.1 三角函数的概念	317
5.2.2 同角三角函数的基本关系	320
5.3 诱导公式	323
第1课时 诱导公式(一)	323
第2课时 诱导公式(二)	325
5.4 三角函数的图象与性质	327
5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象	327
5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质	329
第1课时 周期性与奇偶性	329
第2课时 单调性、最大值与最小值	332
5.4.3 正切函数的性质与图象	334
5.5 三角恒等变换	337
5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式	337
第1课时 两角差的余弦公式	337
第2课时 两角和与差的正弦、余弦、正切公式	339
第3课时 二倍角的正弦、余弦、正切公式	341
5.5.2 简单的三角恒等变换	343
第1课时 三角函数式的化简与求值	343
第2课时 三角函数公式的应用	345
5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$	347
5.6.1 匀速圆周运动的数学模型	347
5.6.2 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	347
第1课时 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	347
第2课时 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质的应用	350
5.7 三角函数的应用	353
④ 本章总结提升	356

◆ 参考答案(单独成册)	361
--------------	-----



【学习目标】

1. 理解绝对值的几何意义,会求含绝对值的方程与不等式.
2. 掌握因式分解的方法,并能熟练运用平方差和立方差公式.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 解含绝对值的方程或不等式

1. 绝对值的意义

(1)代数意义:正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值仍是零,即

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

(2)绝对值的几何意义:一个数的绝对值,是数轴上表示它的点到原点的距离.

2. 绝对值的性质

$$(1) |a| \geq 0, |a| \geq a, |a| \geq -a;$$

$$(2) |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ 或 } a = -b;$$

$$(3) |a^2| = |a|^2 = a^2, |ab| = |a| \cdot |b|, \left| \frac{a}{b} \right| =$$

$$\frac{|a|}{|b|} (b \neq 0).$$

D 典例解析

例 1 解下列方程或不等式:

$$(1) |x-3|=2;$$

$$(2) |x-2|<3;$$

$$(3) |x-1|+|x+2|=5;$$

$$(4) |2x-1|<x+2.$$

变式 1 解下列方程或不等式:

$$(1) |2x-1|=x+1;$$

$$(2) |x-1|>|x+2|.$$

变式 2 若关于 x 的不等式 $|kx-1| \leq 5$ 的解是 $-3 \leq x \leq 2$, 则 k 的值是_____.

◆ 要点二 乘法公式的应用

乘法公式

平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

完全平方公式: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

立方和公式: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

立方差公式: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

三数和平方公式: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$.

D 典例解析

例 2 化简下列各式:

- (1) $(-x-1)(x^2-x+1)$;
(2) $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$;
(3) $x(x-2)^2-(x^2-4x+4)(x+2)$.

例 3 (1) 已知 $a+b=3, ab=-8$, 求下列各式的值.

① a^2+b^2 ; ② a^2-ab+b^2 ; ③ $(a-b)^2$.

(2) 已知 $x+y=2$, 求 x^3+y^3+6xy 的值.

变式 1 化简下列各式:

- (1) $(3+2y)(9-6y+4y^2)$;
(2) $(x^3-1)(x^6+x^3+1)(x^9+1)$.

变式 2 (1) 已知 $x+y=1$, 求 x^3+y^3+3xy 的值;

(2) 已知 $a-b=2, ab=48$, 求 a^4+b^4 的值.

◆ 要点三 因式分解

因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式, 像这样的式子变形叫作这个多项式的因式分解.

因式分解的常用方法: 提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法、待定系数法和因式定理法.

D 典例解析

例 4 用合适的方法进行因式分解.

- (1) $2mn^4-162m$;
(2) $x^2+98y^2-21xy+x-7y$;
(3) $2ax-10ay+5by-bx$;
(4) x^3+2x^2-5x-6 .

变式 对下列各式进行因式分解:

- (1) a^5b-ab ;
(2) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$;
(3) $4x^2-2x+6xy-3y$.

[素养小结]

因式分解的常用方法: 提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法. 需要熟记乘法公式.

衔接二 函数

【学习目标】

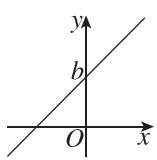
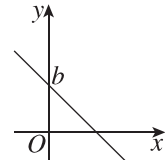
1. 熟练掌握一次函数、反比例函数和二次函数的图象和性质.
2. 理解函数的最值.
3. 会利用数形结合的方法求解相关问题.

课堂明新知

知识导学 典例探究

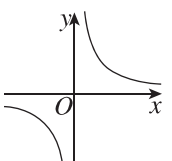
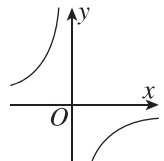
◆ 要点一 常见函数的图象与性质

1. 一次函数的图象与性质

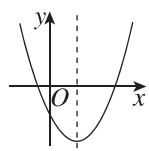
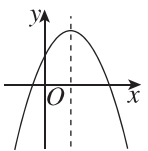
$y=kx+b(k \neq 0)$	$k > 0$	$k < 0$
图象		
性质	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小
当 $b=0$ 时, 图象过原点 $(0,0)$		

(b 是函数的图象与 y 轴交点的纵坐标)

2. 反比例函数的图象与性质

$y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$	$k > 0$	$k < 0$
图象		
性质	在每个象限, y 随 x 的增大而减小	在每个象限, y 随 x 的增大而增大

3. 二次函数的图象与性质

函数	$y=ax^2+bx+c(a > 0)$	$y=ax^2+bx+c(a < 0)$
图象		
开口方向	向上	向下

(续表)

函数	$y=ax^2+bx+c(a > 0)$	$y=ax^2+bx+c(a < 0)$
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$	
增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, y 有最小值, 且 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, y 有最大值, 且 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

◆ 要点二 函数图象变换

1. 平移变换

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[k < 0, \text{向下平移 } |k| \text{ 个单位长度}]{k > 0, \text{向上平移 } k \text{ 个单位长度}}$ $y=f(x)+k$ 的图象;

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[h < 0, \text{向右平移 } |h| \text{ 个单位长度}]{h > 0, \text{向左平移 } h \text{ 个单位长度}}$ $y=f(x+h)$ 的图象.

2. 翻折变换

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{右翻左}]{\text{去左留右}}$ $y=f(|x|)$ 的图象;

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{下翻上}]{\text{去下留上}}$ $y=|f(x)|$ 的图象.

总结: 函数图象的变换口诀为“左加右减, 上加下减”.

D 典例解析

例 1 指出下列函数图象的变换过程.

从 $y = 3x^2$ 到 ① $y = 3(x+2)^2$; ② $y = 3x^2 - 4$;
③ $y = 3x^2 - 6x + 8$.

变式 1 指出下列函数图象的变换过程.

(1) 从 $y = 2x$ 到 ① $y = 2x - 4$; ② $y = 2(x+1)$;
③ $y = 2(x-1) + 3$.

(2) 从 $y = \frac{2}{x}$ 到 ① $y = \frac{2}{x+1}$; ② $y = \frac{2}{x} - 1$; ③ $y = \frac{2}{x-1} + 3$.

变式 2 将二次函数 $y = 2(x+2)^2 - 5$ 的图象向左平移 3 个单位长度后, 再将所得图象作关于 x 轴对称, 则所得图象的顶点坐标为 _____.

[素养小结]

平移变换: 左加右减、上加下减, 其中“左加右减”是对 x 进行加减, 比如函数 $y = 3x + 1$ 的图象右移 2 个单位长度, 得到的图象对应的函数解析式不是 $y = 3x - 2 + 1$, 而是 $y = 3(x-2) + 1$, 这个括号不能丢.

◆ 要点三 二次函数的最值

当 $m \leq x \leq n (m < n)$ 时, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最值问题

要领:

① 抛物线的开口方向;

② 对称轴与 m, n 的位置(最多四种情况):

对称轴在 m 左; 对称轴在 m, n 之间且偏 m ; 对称轴在 m, n 之间且偏 n ; 对称轴在 n 右.

D 典例解析

角度 1 定轴定范围

例 2 求函数 $y = x^2 - 4x + 1$ 在下列自变量取值范围内的最大值和最小值.

(1) $3 \leq x \leq 4$; (2) $0 \leq x \leq 1$; (3) $0 \leq x \leq 3$.

变式 已知函数 $y = -x^2 + 4x + a$, 其中 $0 \leq x \leq 1$, 若函数有最小值 -2 , 则函数的最大值为 _____.

角度 2 动轴定范围

例 3 求 $y = x^2 - 2ax - 1$ 在 $0 \leq x \leq 2$ 时的最大值和最小值.

变式 已知函数 $y = x^2 + 2ax + 1$ 在 $-1 \leq x \leq 2$ 时的最大值为 4, 求实数 a 的值.

角度 3 定轴动范围

例 4 当 $t \leq x \leq t + 1$ 时, 求函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$ 的最小值.

变式 当 $t \leq x \leq t + 1$ 时, 求函数 $y = -2x^2 - x + 4$ 的最大值.

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念



讲课智能体

【学习目标】

1. 了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
2. 能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 元素与集合的概念

1. 元素:一般地,我们把研究对象统称为_____,元素通常用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示.
2. 集合:把一些元素_____叫作集合(简称为集).集合通常用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示.

D 典例解析

例 1 下列说法中正确的是 ()

- A. 组成集合的元素必须是数
- B. 组成集合的元素一定是有限个
- C. 平面内,到线段两 endpoints 距离相等的点可以组成一个集合
- D. 数 $1, 0, 5, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \sqrt{\frac{1}{4}}$ 组成的集合中有 6 个元素

变式 大于 0.5 且不大于 6 的自然数的全体组成的集合的元素是_____.

[素养小结]

集合是一个整体,所有满足条件的对象都在这个集合中.集合中的元素是我们研究的对象,根据研究对象的不同,集合中的元素可以有多个也可以只有一个.

◆ 要点二 集合中元素的性质

1. 集合中元素的三个性质为:_____,_____,无序性.
2. 集合相等:只要构成两个集合的_____是一样的,我们就称这两个集合是相等.

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 中国著名的科学家可以组成一个集合. ()

(2) 历届数学界的诺贝尔奖——菲尔兹奖的得主可以组成一个集合. ()

(3) 不超过 2026 的非负实数可以组成一个集合. ()

2. 某中学高一年级共有 6 个班,这 6 个班组成一个集合 A .

- (1) 高一(2)班、高二(6)班是集合 A 中的元素吗?
- (2) 若 $a \in A, b \in A$, 则元素 a, b 有什么关系? 为什么?

D 典例解析

例 2 (1) 下列各组对象不能组成集合的是 ()

- A. 中国古代四大发明
- B. 所有无理数
- C. 必修第一册中的数学难题
- D. 小于 π 的正整数

(2) [2026·河北衡水安平中学高一检测] 已知集合 A 中含有两个元素 $x+1, x^2$, 集合 B 中含有两个元素 $1, 0$, 若两个集合相等, 则实数 $x =$ _____.

变式 (1)(多选题) 下列说法中正确的是 ()

- A. 在平面内,与定点 A, B 等距离的点不能组成集合
- B. 若集合 B 由“good”中的字母构成,则 B 中有 4 个元素
- C. 一个集合中有三个元素 a, b, c , 其中 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 则 $\triangle ABC$ 不可能是等边三角形
- D. 体型庞大的海洋生物不能组成集合

(2)[2026·华东师大附中高一期中] 已知集合 A 的三个元素可以表示成 $a, \frac{b}{a}, 1$, 也可以表示成 $a^2, a+b, 0$, 则 $a^{2025} + b^{2026} =$ _____.

[素养小结]

- (1) 判定所给对象能组成集合的关键是所给对象满足确定性、互异性和无序性.
 (2) 对于求集合中参数的问题, 常根据集合中元素的确定性得出参数的所有可能取值, 再利用集合中元素的互异性进行检验.

◆ 要点三 元素与集合的关系

1. 元素与集合的关系: 如果 a 是集合 A 中的元素, 就说 a _____ 集合 A , 记作 _____; 如果 _____, 就说 a 不属于集合 A , 记作 _____.
 2. 常用数集及其记法:

常见的数集	符号表示
自然数集	_____
正整数集	_____ 或 _____
整数集	_____
有理数集	_____
实数集	_____

D 典例解析

例 3 (1) 用符号“ \in ”或“ \notin ”填空: 0 _____ \mathbf{N} ;
 $\frac{1}{3}$ _____ \mathbf{Q} ; 2.4 _____ \mathbf{Z} ; $\sqrt{3}$ _____ \mathbf{Q} ;
 4 _____ \mathbf{Z} .

(2)[2026·浙江宁波高一期中] 已知集合 A 中含有三个元素 $12, a^2 + 4a, a - 2$, 若 $-3 \in A$, 则 $a =$ _____.

变式 (1) 下列四个结论中, 正确的个数是 ()

- ① 集合 \mathbf{N} 中最小的元素是 1; ② 若 $a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}^*$, 则 $a + b$ 的最小值是 2; ③ 若 $-a \notin \mathbf{N}$, 则 $a \in \mathbf{N}$;
 ④ $x^2 + 4 = 4x$ 的解集中含有两个元素.
 A. 0 B. 1
 C. 2 D. 3

(2)[2026·广东清远华侨中学高一期中] 已知集合 A 由方程 $x^2 - ax + 3 = 0, a \in \mathbf{R}$ 的实数根组成, 若 $1 \in A$, 则 $a =$ _____.

[素养小结]

判断一个元素是否属于某一集合, 就是判断这个元素是否满足该集合元素的条件. 若满足, 就是“属于”关系; 若不满足, 就是“不属于”关系. 特别注意, 符号“ \in ”与“ \notin ”只表示元素与集合的关系.

◆ 要点四 集合的表示法

1. 列举法: 把集合的所有元素 _____ 出来, 并用花括号“ $\{ \}$ ”括起来表示集合的方法叫作列举法. 注意元素间要用“,”隔开, 如 $\{-1, 0, 1, 2\}$.
 2. 描述法: 设 A 是一个集合, 我们把集合 A 中所有具有 _____ 特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为 _____, 这种表示集合的方法称为描述法.

[诊断分析] 1. 方程 $(x+1)(x-2) = 0$ 的实数根组成的集合中有多少个元素? 并用适当的方法表示这个集合.

2. 由抛物线 $y = x^2$ 上的点组成的集合中有多少个元素? 并用适当的方法表示这个集合.

D 典例解析

角度 1 列举法表示集合

例 4 用列举法表示下列集合.

- (1) 中国国旗上所有颜色组成的集合;
- (2) 15 的正约数组成的集合;
- (3) 方程 $x^2 = x$ 的所有实数解组成的集合;
- (4) 直线 $y = x$ 与 $y = 2x - 1$ 的交点组成的集合.

(2) 正偶数组成的集合;

(3) 函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 的图象上所有的点组成的集合.

变式 用适当的方法表示下列集合.

- (1) 大于 1 且不大于 17 的质数组成的集合 A ;
- (2) 所有奇数组成的集合 B ;
- (3) 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = x^2$ 图象上的点组成的集合 C ;
- (4) $D = \{(x, y) \mid x + y = 5, x \in \mathbf{N}_+, y \in \mathbf{N}_+\}$.

[素养小结]

用列举法表示集合应注意的三点:

- (1) 应先弄清集合中的元素是什么, 是数还是点, 还是其他元素;
- (2) 集合中的元素一定要写全, 但不能重复;
- (3) 若集合中的元素是点, 则应将有序实数对用小括号括起来表示一个元素.

角度 2 描述法表示集合

例 5 [2026 · 江苏扬州树人中学月考] 用描述法表示下列集合:

- (1) 不等式 $2x - 3 < 1$ 的解组成的集合 A ;

[素养小结]

- (1) 用描述法表示集合, 应先弄清集合的属性, 是数集、点集还是其他的类型. 一般地, 数集用一个字母代表其元素, 而点集则用一个有序实数对来代表其元素.
- (2) 若描述部分出现元素记号以外的字母时, 则要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

1.2 集合间的基本关系

【学习目标】

1. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
2. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系,体会图形对理解抽象概念的作用.
3. 在具体情境中,了解空集的含义.

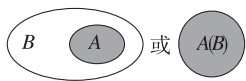
课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 子集

1. Venn 图:在数学中,经常用平面上封闭曲线的_____代表集合,这种图称为 Venn 图.

2. 子集

定义	一般地,对于两个集合 A, B ,如果集合 A 中_____元素都是集合 B 中的元素,就称集合 A 为集合 B 的子集
记法与读法	记作_____ (或_____),读作“ A 包含于 B ”(或“ B 包含 A ”)
图示	
结论	(1)反身性:任何一个集合是它本身的子集,即 $A \subseteq A$; (2)传递性:对于集合 A, B, C ,若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$

3. 集合的相等关系

定义	一般地,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么集合 A 与集合 B 相等
记法	记作_____
符号表示	若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 $A = B$

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) $\{0\} \subseteq \{x | x < 5, x \in \mathbf{R}\}$. ()
- (2) 设 $A = \{x | x \text{ 是三角形}\}$,则 $A \subseteq A$. ()
- (3) $0 \subseteq \{-1, 0, 1\}$. ()

2. 符号“ \in ”与“ \subseteq ”的区别是什么?

D 典例解析

例 1 (1) [2026 · 贵州遵义二十二中高一期中] 若 $M = \{x, y, z\}$,则以下表示正确的是 ()

- A. $x \subseteq M$ B. $\{x\} \subseteq M$
C. $M \in (y, z)$ D. $\{z\} \in M$

(2) 设集合 $A = \{x | |x| < 3\}$, $B = \{x | -1 < x < 3\}$,则集合 A, B 满足的关系是_____ (用“ \subseteq ”或“ $=$ ”连接 A, B).

变式 (1) (多选题) 以下说法正确的是 ()

- A. $0 \in \{x | x^2 = 0\}$
B. $\{1\} \in \mathbf{N}$
C. $\{2, 1\} = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$
D. $\{x | x < 1\} \subseteq \{x | x < 0\}$

(2) 指出下列各集合之间的关系,并用 Venn 图表示:

$A = \{x | x \text{ 是四边形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$,
 $C = \{x | x \text{ 是矩形}\}$, $D = \{x | x \text{ 是正方形}\}$.

[素养小结]

判断集合间关系的方法

(1) 列举观察法:当集合中元素较少时,可以列出集合中的全部元素,通过定义得出集合之间的关系.

(2) 集合元素特征法:首先弄清集合中元素的特征,再利用集合中元素的特征判断集合间的关系.

(3) 数形结合法:利用 Venn 图、数轴等直观地判断集合间的关系.

◆ 要点二 真子集

1. 真子集

定义	如果集合 $A \subseteq B$, 但存在元素 _____, 且 _____, 就称集合 A 是集合 B 的真子集
记法与读法	记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$), 读作“ A 真包含于 B ” (或“ B 真包含 A ”)
图示	
结论	(1) $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$; (2) $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则 $A \subsetneq B$

2. 空集

定义	一般地, 我们把 _____ 的集合叫作空集
记法	记为 \emptyset
规定	空集是任何集合的 _____, 即 $\emptyset \subseteq A$
特性	(1) 空集只有一个子集, 即它的本身, $\emptyset \subseteq \emptyset$; (2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subsetneq A$

D 典例解析

例 2 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集和真子集, 并写出子集和真子集的个数. 试猜想含 n 个元素的集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的所有子集的个数是多少? 真子集的个数及非空真子集的个数呢?

变式 (1) [2026 · 湖南长沙一中高一期中] 已知 $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid -2 \leq x \leq 5\}$, 则它的非空真子集的个数为 _____.

(2) 已知集合 M 满足 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 写出所有满足条件的集合 M .

[素养小结]

1. 假设集合 A 中含有 n 个元素, 则

- (1) A 的子集有 2^n 个;
- (2) A 的非空子集有 $(2^n - 1)$ 个;
- (3) A 的真子集有 $(2^n - 1)$ 个;
- (4) A 的非空真子集有 $(2^n - 2)$ 个.

2. 求给定集合的子集的两个注意点:

- (1) 按子集中元素个数的多少, 以一定的顺序来写;
- (2) 在写子集时不要忘记空集和集合本身.

◆ 要点三 由集合间的关系求参数

D 典例解析

例 3 (1) [2026 · 江苏常州高一期中] 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$, 集合 $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 取值集合的真子集的个数为 _____.

(2) [教材 P9T5(2)] 已知集合 $A = \{x \mid 0 < x < a\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 2\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

变式 (1) 设非空集合 $A = \{x \mid -2 < x \leq m - 3n\}$, $B = \{x \mid 3m + n < x \leq 2\}$. 若 $A = B$, 则实数 $m =$ _____, $n =$ _____.

(2) 已知集合 $A = \{1, a + 2\}$, $B = \{1, 2, a^2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的值为 _____.

[素养小结]

由集合间的关系求参数问题的注意点及常用方法:

- (1) 注意点: ① 不能忽视集合为 \emptyset 的情形; ② 当集合中含有字母参数时, 一般需要分类讨论.
- (2) 常用方法: 对于用不等式给出的集合, 已知集合的包含关系求相关参数的范围(值)时, 常采用数形结合的思想, 借助数轴解答.

1.3 集合的基本运算

第1课时 集合的并集、交集

【学习目标】

1. 理解并集、交集的概念,会用文字语言、符号语言及图形语言来描述这些概念.
2. 了解并集、交集的一些简单性质,会求两个简单集合的并集与交集.
3. 能使用 Venn 图表达集合的并集与交集.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 集合的并集

1. 并集的三种语言表示:

文字语言	一般地,由所有_____的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作_____ (读作“ A 并 B ”)
符号语言	$A \cup B = \{x \underline{\hspace{2cm}}\}$
图形语言	

2. 并集的运算性质

(1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \emptyset = A$; (3) $A \cup B = B \cup A$; (4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$, 反之也成立.

典例解析

例 1 (1) 设集合 $A = \{4, 5, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 7, 8\}$, 则集合 $A \cup B =$ ()

- A. $\{5, 8\}$ B. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
C. $\{4, 6\}$ D. $\{3, 4, 6, 7\}$

(2) [2026 · 北京三十五中高一月考] 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, 那么 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | -2 \leq x \leq 4\}$
B. $\{x | x \leq 3 \text{ 或 } x > 4\}$
C. $\{x | -2 \leq x \leq -1\}$
D. $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$

变式 (1) 已知集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

(2) 满足 $M \cup \{2\} = \{1, 2, 4\}$ 的集合 M 的个数为 _____.

[素养小结]

并集运算应注意的问题:

- (1) 对于用描述法表示的集合, 应先看集合的代表元素是什么, 然后将集合化简, 再按定义求解.
- (2) 求两个集合的并集时要注意利用集合中元素的互异性这一属性, 重复的元素只能算一个.
- (3) 对于元素个数无限的集合进行并集运算时, 可借助数轴, 利用数轴分析法求解, 但要注意端点的值能否取到.

◆ 要点二 集合的交集

1. 交集的三种语言表示:

文字语言	一般地,由所有属于_____的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集,记作_____ (读作“ A 交 B ”)
符号语言	$A \cap B = \{x \underline{\hspace{2cm}}\}$
图形语言	

2. 交集的运算性质

(1) $A \cap A = A$; (2) $A \cap \emptyset = \emptyset$; (3) $A \cap B = B \cap A$; (4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$, 反之也成立.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

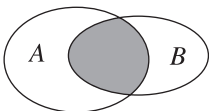
- (1) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 则 A 与 B 的交集为空集. ()
(2) 若 $x \in (A \cap B)$, 则 $x \in (A \cup B)$. ()
(3) 若 $x \in (A \cup B)$, 则 $x \in (A \cap B)$. ()

典例解析

例 2 (1) 已知集合 $M = \{x | -1 < x \leq 1\}$, $N = \{x | 0 < x < 2\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 < x < 1\}$
 C. $\{x | -1 < x \leq 1\}$ D. $\{x | -1 < x < 2\}$

(2) 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + x - 6 = 0\}$,



则图中阴影部分表示的集合为

()

- A. $\{2\}$ B. $\{3\}$
 C. $\{-3, 2\}$ D. $\{-2, 3\}$

变式 (1) [2026 · 河北张家口高一阶段练] 已知集合 $A = \{-3, -1, 1, 2, 3\}$, $B = \{-4, -2, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{1, 2\}$
 B. $\{1, 2, 3\}$
 C. $\{-4, -3, -2, -1, 3\}$
 D. $\{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

(2) 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x\}$, $B = \{(x, y) | y = 5 - 4x\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(1, 1)$
 B. $\{(1, 1)\}$
 C. $(-1, -1)$
 D. $\{(-1, -1), (1, 1)\}$

[素养小结]

求集合 $A \cap B$ 的常见类型:

- ① 若 A, B 中的元素是方程的根, 则应先解方程求出方程的根, 再求两集合的交集.
- ② 若 A, B 中的元素是有序实数对, 则 $A \cap B$ 是指两个方程组成的方程组的解集, 交集是点集.
- ③ 若 A, B 是无限数集, 则可以利用数轴来求解, 但要注意利用数轴表示不等式时, 含有端点的值用实心点表示, 不含有端点的值用空心圈表示.

◆ 要点三 根据并集与交集运算求参

典例解析

例 3 [2026 · 吉林长春八中高一月考] 已知集合 $A = \{x | -4 < x < 3\}$, 集合 $B = \{x | 3 - m < x < 2m - 3\}$.

(1) 若 $A \cup B = \{x | -4 < x < 7\}$, 求 $A \cap B$;

(2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

变式 (1) [2026 · 河南南阳高一期中] 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, a^2\}$, $A \cap B = \{1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{-2, 1, 2\}$
 C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{-1, 1, 2\}$

(2) [2026 · 安徽灵璧中学高一月考] 已知集合 $A = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $B = \{x | a - 1 < x < a + 1\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $1 < a < 2$ B. $1 \leq a < 2$
 C. $1 < a \leq 2$ D. $1 \leq a \leq 2$

(3) [2026 · 江苏苏州高一阶段练] 设集合 $A = \{x | x + 1 \leq 0 \text{ 或 } x - 4 \geq 0\}$, $B = \{x | 2a \leq x \leq a + 2\}$. 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

[素养小结]

(1) 在利用交集、并集的性质解题时, 常常会遇到 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ 这类问题, 解答时常借助于交、并集的定义以及集合间的关系去分析, 如由 $A \cap B = A$ 得 $A \subseteq B$, 由 $A \cup B = B$ 得 $A \subseteq B$ 等.

(2) 当集合 $B \subseteq A$ 时, 如果集合 A 是一个确定的集合, 而集合 B 不确定, 那么运算时要考虑 $B = \emptyset$ 的情况.

第 2 课时 集合的全集、补集

【学习目标】

1. 在具体情境中,了解全集的含义.
2. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
3. 能使用 Venn 图表示集合的基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课堂明新知

知识导学 典例探究


◆ 要点一 全集与补集

1. 全集

(1)定义:一般地,如果一个集合含有所研究问题中涉及的 _____,那么就称这个集合为全集.

(2)记法:全集通常记作 _____.

2. 补集

定义	文字语言	对于一个集合 A ,由全集 U 中 _____ 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作 _____
	符号语言	$\complement_U A = \{x \mid \underline{\hspace{2cm}}\}$
	图形语言	
性质	(1) $\complement_U A \subseteq U$; (2) $\complement_U U = \underline{\hspace{2cm}}$, $\complement_U \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}$; (3) $\complement_U (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$; (4) $A \cup (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \cap (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)一个集合的补集一定含有元素. ()
- (2)设全集 $U = \mathbf{R}$,存在 $x_0 \in U, x_0 \notin A$,且 $x_0 \notin \complement_U A$. ()

D 典例解析

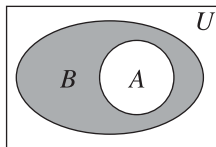
例 1 (1)已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$,则 $\complement_U M =$ ()

- A. 5 B. $\{5\}$
C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(2)[2026·浙江金华高一期中] 已知集合 $U = \{x \mid |x| > 1\}$, $A = \{x \mid x > 2\}$,则 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{x \mid x < 2\}$
B. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$
C. $\{x \mid x \leq 2\}$
D. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$

变式 (1)若集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq x \leq 9\}$,则图中阴影部分表示的集合中的元素个数为 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

(2)已知全集 U ,集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $\complement_U A = \{2, 4, 6\}$, $\complement_U B = \{1, 4, 6\}$,则集合 $B =$ _____.

【素养小结】

求集合的补集的方法:

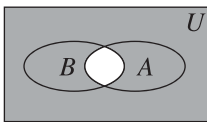
- (1)定义法:当集合中的元素较少时,可利用定义直接求解.
- (2)Venn 图法:借助 Venn 图可直观地求出补集.
- (3)数轴法:当集合中的元素连续且无限时,可借助数轴求解,此时需注意端点取值.

◆ 要点二 并集、交集、补集的综合运算

D 典例解析

例 2 [教材 P14T4] 已知集合 $A = \{x \mid 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 10\}$,求 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B)$, $\complement_{\mathbf{R}}(A \cap B)$, $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B, A \cup (\complement_{\mathbf{R}}B)$.

变式 (1) [2026·广东江门新纪元中学高一月考] 已知全集 $U = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 5\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则如图所示的阴影部分表示的集合为 ()



- A. $\{2, 3\}$
 B. $\{0, 3, 5\}$
 C. $\{0, 1, 4, 5\}$
 D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(2) (多选题) 已知集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | 3 - 2x > 0\}$, 则 ()

- A. $A \cap B = \{x | x < \frac{3}{2}\}$
 B. $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | \frac{3}{2} \leq x < 2\}$
 C. $A \cup B = \{x | x < \frac{3}{2}\}$
 D. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \mathbf{R}$

[素养小结]

- (1) 解决与集合的交、并、补集运算有关的综合问题时, 一般先运算括号内的部分, 如求 $(\complement_U A) \cap B$ 时, 可先求出 $\complement_U A$, 再求交集; 求 $\complement_U (A \cup B)$ 时, 可先求出 $A \cup B$, 再求补集.
 (2) 不等式中的等号在补集中能否取到, 要引起重视, 还要注意补集是全集的子集.

◆ 要点三 利用集合间的关系求参

D 典例解析

例 3 (1) [2026·湖北武汉高一期中] 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | x > m\}$, 若 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \mathbf{R}$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $m < 3$ B. $m > 3$
 C. $m < 7$ D. $m > 7$

(2) 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - (m+1)x + m = 0\}$, 若 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset$, 则实数 m 的取值集合为 _____.

变式 (1) 设全集 $U = \{1, 3, m^2 + m - 9\}$, 集合 $A = \{1, m\}$, $\complement_U A = \{3\}$, 则实数 $m =$ _____.

(2) [2026·山东潍坊中学高一月考] 已知 $A = \{x | 0 < x < 10\}$, $B = \{x | m - 1 < x < m + 1\}$, 若 $\complement_{\mathbf{R}} A \subseteq \complement_{\mathbf{R}} B$, 则 m 的取值范围为 _____.

[素养小结]

- 由集合的补集求解参数的方法:
 (1) 当集合中元素个数有限时, 可利用补集定义并结合集合知识求解.
 (2) 当集合中元素个数无限时, 一般利用数轴分析法求解.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件

【学习目标】

- 通过对典型数学命题的梳理, 理解充分条件的意义, 理解判定定理与充分条件的关系.
- 通过对典型数学命题的梳理, 理解必要条件的意义, 理解性质定理与必要条件的关系.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 充分条件与必要条件

(续表)

	“若 p , 则 q ”为真命题	“若 p , 则 q ”为假命题
推出关系	p _____ q	p _____ q
条件关系	p 是 q 的 _____ 条件 q 是 p 的 _____ 条件	p 不是 q 的 _____ 条件 q 不是 p 的 _____ 条件

	“若 p , 则 q ”为真命题	“若 p , 则 q ”为假命题
定理关系	一般地, 数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件; 一般地, 数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件	

典例解析

角度1 充分条件

例1 下列“若 p ,则 q ”形式的命题中,哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

- (1)若 $4x^2 - mx + 9$ 是完全平方式,则 $m = 12$;
- (2)若 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$,则 $(x - 1)(y - 2) = 0$;
- (3)在 $\triangle ABC$ 中,若 $A + B = 90^\circ$,则 $C = 90^\circ$;
- (4)若 $x \in A \cap B$,则 $x \in A \cup B$.

角度2 必要条件

例2 下列各题中,哪些 q 是 p 的必要条件?

- (1) $p: x = 1, q: x - 1 = \sqrt{x - 1}$;
- (2) $p: -2 \leq x \leq 5, q: -1 \leq x \leq 5$;
- (3) $p: a$ 是自然数, $q: a$ 是正整数;
- (4) $p: \triangle ABC$ 是等边三角形, $q: \triangle ABC$ 是等腰三角形.

变式 下列所给的各组 p, q 中, p 是 q 的充分条件的有哪些? p 是 q 的必要条件的有哪些?

- (1) $p: \triangle ABC \cong \triangle DEF, q: S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF}$;
- (2) $p: \triangle ABC$ 是直角三角形, $q: \triangle ABC$ 的两个锐角互余;
- (3) $p: m \leq 1, q: \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + 2x + m = 0 \text{ 有实数解}$;
- (4) $p: ab = 0, q: a = 0$.

[素养小结]

充分条件、必要条件的几种判定方法:

- (1)定义法:根据 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 进行判断,适用于定义、定理的判断性问题.
- (2)集合法:根据 p, q 成立的对象组成的集合之间的包含关系进行判断,多适用于命题中涉及参数范围的推断问题.

◆ 要点二 充分条件与必要条件的探求

典例解析

例3 使不等式 $-5x + 3 \geq 0$ 成立的一个充分条件是 ()

- A. $x < 0$ B. $x \geq 0$
C. $x \leq 1$ D. $x > 1$

变式 [2026·江西赣州于都二中高一月考] 使不等式 $-4 \leq x + 1 \leq 4$ 成立的一个必要条件是 ()

- A. $2 \leq x \leq 3$ B. $-6 \leq x \leq 3$
C. $-5 \leq x \leq 2$ D. $-6 \leq x \leq 2$

[素养小结]

p 是 q 的充分(必要)条件中的 p 是不唯一的,解题时一定要细心,以防出错.

◆ 要点三 充分条件、必要条件的应用

典例解析

例 4 [2026·四川广元高一阶段练] 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, 非空集合 $B = \{x | 2 - a \leq x \leq 1 + 2a\}$.

(1) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 求实数 a 的取值范围.

变式 已知 $p: -4 < x - a < 4, q: 2 < x < 3$, 若 p 是 q 的必要条件, 则实数 a 的取值范围是_____.

[素养小结]

根据充分条件、必要条件求参数的取值范围时, 主要根据充分条件、必要条件与集合间的关系, 将问题转化为相应的两个集合之间的包含关系, 然后建立关于参数的不等式(组)进行求解, 有时还需要借助数轴解决问题.

1.4.2 充要条件

【学习目标】

通过对典型数学命题的梳理, 理解充要条件的意义, 理解数学定义与充要条件的关系.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 充要条件

1. 逆命题

将命题“若 p , 则 q ”中的条件 p 和结论 q 互换, 就得到一个新的命题“若 q , 则 p ”, 称这个命题为原命题的逆命题.

2. 充要条件

如果“若 p , 则 q ”和它的逆命题“若 q , 则 p ”均是真命题, 即既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 就记作_____.

此时, p 既是 q 的充分条件, 也是 q 的必要条件, 我们说 p 是 q 的_____.

显然, 如果 p 是 q 的充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件. 概括地说, 如果 $p \Leftrightarrow q$, 那么 p 与 q _____.

3. 条件关系判定的常用结论:

条件 p 与结论 q 的关系	结论 (p 是 q 的)
$p \Rightarrow q$, 且 $q \not\Rightarrow p$	充分不必要条件
$q \Rightarrow p$, 且 $p \not\Rightarrow q$	必要不充分条件
$p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$	充要条件
$p \not\Rightarrow q$, 且 $q \not\Rightarrow p$	既不充分也不必要条件

【诊断分析】 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 已知 p : 两个角是对顶角, q : 两个角相等, 则 p 是 q 的充要条件. ()

(2) 已知 $p: x = 2, q: x^2 - 4x + 4 = 0$, 则 p 是 q 的充要条件. ()

(3) 已知集合 A, B, C 均不是空集, $p: A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, q: A = B = C$, 则 p 是 q 的充要条件. ()